数理解析研究所講究録 1271 巻 2002 年 80-89

A Fused Hierarchy of IKK System

日大・理工　紺野　公明 (Kimiaki Konno)*
富山大・工　角畠　浩 (Hiroshi Kakuhata)**
*Department of Physics, College of Science and Technology,
Nihon University,
** Toyama University

1 初めに

可積分系を議論する有力な方法の一つに逆問題がある. 与えられた逆問題の一つの方程式に含まれるスペクトルパラメーターを正ベキに展開したり逆ベキに展開したり可積分方程式とそのヒエラルキーを議論することができる. 正ベキと逆ベキを同時に含むときを議論したものは少ない. その時は二種のヒエラルキーを同時に考えることが出来る. modified Korteweg-de Vries (mKdV) 方程式とそのヒエラルキー並びに sine-Gordon 方程式とそのヒエラルキーを含む系はその代表的な例である [1]. その議論の過程から二つのヒエラルキーは以下に述べる意味で互いに結びつかないことが分かっている.

我々は, 二種のヒエラルキーを持つ逆問題を見い出した. その系も mKdV + sine-Gordon の系と同じように二つのヒエラルキーが結びつかないことが分かっている. しかし, そこには或る条件があり, その条件を使うことにより二つのヒエラルキーを結びつけ大きなヒエラルキーを持つ新しい系をつくることが出来ることを報告する.

先ず, mKdV+sine-Gordon ヒエラルキーでは, 二つのヒエラルキーは互いに結びつかないことを示す. mKdV ヒエラルキーの n 番目の方程式を

$$\phi_t - \eta_n = 0 \tag{1}$$

で与える. ここで η_n は, 1 番目の方程式を与える η_1 から漸化式を与える演算子 Ω_{mKdV} を使い

$$\eta_n = \Omega_{\rm mKdV}^{n-1}\eta_1 \tag{2}$$

として与えられる. ここで, η_1 と $\Omega_{\rm mKdV}$ は

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \phi_x, \\ \Omega_{\rm mKdV} &= -\mathrm{D}^2 - \phi_x\,\mathrm{I}\,\phi_x\,\mathrm{D} \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる. D と I は微分と積分演算子

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathrm{I} &= \int^x \mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{4}$$

で定義されている．同じように sine-Gordon ヒエラルキーの n 番目の方程式を

$$\phi_t - \eta_{-n} = 0 \tag{5}$$

で与える．η_{-n} は sine-Gordon 方程式 η_{-1} から漸化式の演算子 Ω_{sG} を使い

$$\begin{aligned} \eta_{-1} &= -\int^x \sin\phi \, \mathrm{d}x', \\ \eta_{-n} &= \Omega_{\mathrm{sG}}^{n-1}\, \eta_{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる．ここで，

$$\Omega_{\mathrm{sG}} = -\mathrm{I}\,(\cos\phi \mathrm{I}\, \cos\phi + \sin\phi \mathrm{I}\, \sin\phi) \tag{7}$$

である．

二つの演算子の間には次の関係がある．

$$\Omega_{\mathrm{mKdV}}\Omega_{\mathrm{sG}}\eta = \Omega_{\mathrm{sG}}\Omega_{\mathrm{mKdV}}\eta = \eta. \tag{8}$$

そうすると mKdV ヒエラルキーは Ω_{sG}^{-1} を使い sine-Gordon ヒエラルキーから求められそうに見える．しかし，次の関係があるため二つのヒエラルキーは相互に結びついていない．

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathrm{sG}}\, \eta_1 &= 0, \\ \Omega_{\mathrm{mKdV}}\, \eta_{-1} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

我々が提案した可積分系を与える逆問題 (IKK system) も二つのヒエラルキーを持つ [2]．即ち，渦糸の局所誘導方程式を含むヒエラルキーと非線形非分散方程式を含むヒエラルキーである．この系についても同じような事情が存在し，二つのヒエラルキーは互いに結びつかないことを次に示す．ところが，それには条件が付加されていていることを示す [3]．その条件を加味すると新しく二つのヒエラルキーを結びつけ大きなヒエラルキー fused hierarchy をつくることが出来ることを示す．

次の章で IKK system のまとめを行い，§ 3 でその fused system について議論する．最後にまとめを行う．

2 IKK system

IKK system の逆問題は以下のように書くことが出来る [2]．

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U\Psi, \\ \Psi_t &= W\Psi. \end{aligned} \tag{10}$$

U と W は以下のように与える.

$$
\begin{aligned}
U &= \lambda R, \\
W &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n W_n.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

R は考えている代数の要素で λ はスペクトルパラメータである. 無矛盾条件から以下の関係が求まる.

$$
\begin{aligned}
&\cdots \\
&W_{3,x} - [R, W_2] = 0, \\
&W_{2,x} - [R, W_1] = 0, \\
&R_t - W_{1,x} + [R, W_0] = 0, \\
&-W_{0,x} + [R, W_{-1}] = 0, \\
&-W_{-1,x} + [R, W_{-2}] = 0, \\
&\cdots.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

運動方程式

$$
R_t - W_{1,x} + [R, W_0] = 0 \tag{13}
$$

は以下の W_1 と W_0 からつくられる各々二つの方程式に分離できる.

$$
\begin{aligned}
R_t - W_{1,x} &= 0, \\
R_t + [R, W_0] &= 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

先ず, この系は W_1 と W_0 からつくられる二つのヒエラルキーをもつ可積分系を与えることを示す.

W_1 と W_0 は次のようにヒエラルキーを構成する方程式を与える成分に展開できる.

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \alpha_1 Y_{11} + \alpha_2 Y_{12} + \alpha_3 Y_{13} + \cdots, \\
W_0 &= \alpha_0 Y_{00} + \alpha_{-1} Y_{0-1} + \alpha_{-2} Y_{0-2} + \cdots.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

W_1 と W_0 からつくられるヒエラルキーをそれぞれ upper part と lower part と呼んでいる. W_n と W_{-n} は次のように与えられる.

$$
\begin{aligned}
W_n &= \alpha_n Y_{11} + \alpha_{n+1} Y_{12} + \alpha_{n+2} Y_{13} + \cdots, \\
W_{-n} &= \alpha_{-n} Y_{00} + \alpha_{-(n+1)} Y_{0-1} + \alpha_{-(n+2)} Y_{0-2} + \cdots.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

(15) と (16) を (12) に代入すると Y_{1m} は Y_{11} から次の関係式から求められ

$$
\begin{aligned}
&[R, Y_{11}] = 0, \\
&Y_{11,x} - [R, Y_{12}] = 0, \\
&Y_{12,x} - [R, Y_{13}] = 0, \\
&\cdots \\
&Y_{1m-1,x} - [R, Y_{1m}] = 0, \\
&\cdots.
\end{aligned} \tag{17}
$$

同じように Y_{00} から Y_{0-m} は次の式から順に求められる.

$$
\begin{aligned}
&Y_{00,x} = 0, \\
&Y_{0-1,x} - [R, Y_{00}] = 0, \\
&Y_{0-2,x} - [R, Y_{0-1}] = 0, \\
&\cdots \\
&Y_{0-m,x} - [R, Y_{0-(m-1)}] = 0, \\
&\cdots.
\end{aligned} \tag{18}
$$

(17) と (18) を計算するために具体的に代数を与えなければならない. ここでは代数として su(2) をとる. Pauli 行列 σ_i を使い次の基底を考える.

$$
X_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_1, \quad X_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_2, \quad X_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_3. \tag{19}
$$

X_n は次の交換関係を満たす.

$$
[X_l, X_m] = \epsilon_{lmn} X_n. \tag{20}
$$

R と他の X_a はこの基底を使い

$$
R = \sum_a R_a X_a \tag{21}
$$

と表せる. 二つの要素 A と B に内積を次のように入れる.

$$
(A, B) = -2\mathrm{Tr}(AB). \tag{22}
$$

このとき, A, B と C の三重積について次の公式が成り立つ.

$$
[A, [B, C]] = (A, C)B - (A, B)C. \tag{23}
$$

(17) から upper part のヒエラルキーを与える漸化式は

$$
Y_{1n,x} - [R, Y_{1n+1}] = 0 \tag{24}
$$

を使い Y_{1n+1} を Y_{1n} から求める式として次のように与えられる [3].

$$\begin{aligned} Y_{1n+1} &= y_{n+1}R - [R, Y_{1n,x}] \\ &\equiv \Omega_+ Y_{1n} \\ &= \Omega_+^n Y_{11}, \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{25}$$

ただし,

$$y_{n+1} = \int_{-\infty}^{x} (R, [R_{x'}, Y_{1n,x'}])\, \mathrm{d}x'. \tag{26}$$

漸化式を与える演算子 Ω_+ を使うと高次のヒエラルキーのメンバーが求められる.

lower part の漸化式は,

$$Y_{0-n,x} - [R, Y_{0-(n-1)}] = 0 \tag{27}$$

を使い簡単に積分することで次のように与えられる [3].

$$\begin{aligned} Y_{0-n} &= \int_{-\infty}^{x} [R, Y_{0-(n-1)}] \mathrm{d}x' \\ &\equiv \Omega_- Y_{0-(n-1)} \\ &= \Omega_-^n Y_{00}. \end{aligned} \tag{28}$$

演算子 Ω_- を使うと高次の lower part の方程式が求められる.

(17) からヒエラルキーの第一番目の方程式を与える Y_{11} が

$$Y_{11} = R \tag{29}$$

として求められる. 演算子 (25) を使うと upper part のヒエラルキーが得られる. これは, 渦糸の局所誘導方程式とそのヒエラルキーを与える. 同じように, (18) から Y_{00} が

$$Y_{00} = R_0 \tag{30}$$

として得られる. ここで, R_0 は定数の要素からなる行列である. (28) を使うと lower part のヒエラルキーが求められる. これは, 非線形非分散方程式を含むヒエラルキーを与える.

漸化式を与える演算子の間には次の関係がある.

$$\Omega_-\Omega_+ Y = \Omega_+\Omega_- Y = Y. \tag{31}$$

ただし, 次の関係と境界条件を満たさなくてはならない.

$$(R, Y_x) = 0 \tag{32}$$

と境界条件

$$Y(x=-\infty)=0. \tag{33}$$

しかし, 二つのヒエラルキーは

$$\begin{aligned}\Omega_+ Y_{00} &= 0,\\ \Omega_- Y_{11} &= 0\end{aligned} \tag{34}$$

のため (31) の関係があるにも関わらず, 切断され互いに結びつけられないことが分かる.

しかし, 次の章で (32) の条件を考慮してこの結びつきの可能性を議論する.

3 A fused system

(15) を使い運動方程式 (12) を考えよう.

$$R_t-(\alpha_1 Y_{11}+\alpha_2 Y_{12}+\cdots)_x+[R,\alpha_0 Y_{00}+\alpha_{-1}Y_{0-1}+\cdots]=0. \tag{35}$$

もし, 関係式

$$[R,Y_{00}]\equiv-(\Omega_- Y_{11})_x=-[R,Y_{11}] \tag{36}$$

を導入すると lower part は upper part と結びつくことが分かる. 即ち, (36) から $Y_{00}=-Y_{11}$ が得られる. Y_{11} から Ω_- を演算することで lower part の Y_{0-n} を

$$Y_{0-n}=-\Omega_-^n Y_{11} \tag{37}$$

として求められる. 勿論, upper part の Y_{1n} は次のように (25) から与えられる.

$$Y_{1n}=\Omega_+^n Y_{11}. \tag{38}$$

もし, (36) を満たすように Y_{11} をとることが出来れば, 二つのヒエラルキーを結びつけた大きな fused hierarchy を構成できる. そのとき, W_1 と W_0 は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}W_1 &= \alpha_1 Y_{11}+\alpha_2\Omega_+ Y_{11}+\alpha_3\Omega_+^2 Y_{11}+\cdots,\\ W_0 &= -\alpha_0 Y_{11}-\alpha_{-1}\Omega_- Y_{11}-\alpha_{-2}\Omega_-^2 Y_{11}-\cdots.\end{aligned} \tag{39}$$

(37) から Y_{1n} の添え字 n を負の値まで拡張して

$$Y_{1-n+1}\equiv -Y_{0-n}\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{40}$$

と定義すると W_n と W_{-n} は次のように表すことが出来る.

$$\begin{aligned}W_n &= \Omega_-^{n-1}W_1,\\ W_{-n} &= \Omega_+^n W_0.\end{aligned} \tag{41}$$

運動方程式は

$$R_t - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n Y_{1n,x} = 0 \tag{42}$$

で与えられる.

fused hierarchy についてその例題を考えてみる. (19) から次の直交化された基底 R, S と T をとる.

$$\begin{aligned} R &= gX_3g^{-1}, \\ S &= gX_1g^{-1}, \\ T &= gX_2g^{-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

ただし,

$$g = e^{\gamma X_3} e^{\phi X_2}. \tag{44}$$

R, S と T は次の関係式を満たす.

$$[R, S] = T, \quad [S, T] = R, \quad [T, R] = S. \tag{45}$$

一般式 Y_{11}

$$Y_{11} = a_{11}R + a_{21}S + a_{31}T \tag{46}$$

は, 条件 (32)

$$(R, Y_{11,x}) = 0 \tag{47}$$

を満たすようにするため係数 a_{11}, a_{21} と a_{31} について次の関係を満たさなくてはならない.

$$a_{11,x} - \phi_x a_{21} - \gamma_x \sin\phi\, a_{31} = 0. \tag{48}$$

$Y_{11,x}$ を

$$Y_{11,x} = b_{21}S + b_{31}T \tag{49}$$

と表すと係数は

$$\begin{aligned} b_{21} &= \phi_x a_{11} + a_{21,x} - \gamma_x \cos\phi\, a_{31}, \\ b_{31} &= \gamma_x \sin\phi\, a_{11} + \gamma_x \cos\phi\, a_{21} + a_{31,x} \end{aligned} \tag{50}$$

で与えられる.

ここでは一つの例として a_{21} = 定数で a_{31} = 定数の場合を考える. 演算子 Ω_+ を使うと upper part の最初のメンバーの方程式は

$$Y_{12,x} = b_{22}S + b_{32}T \tag{51}$$

で与えられる. ただし, 係数は次の通りである.

$$
\begin{aligned}
b_{22} &= a_{21}(2\phi\phi_x\gamma_x\cos\phi + \gamma_{xx}\cos\phi + \phi\gamma_{xx}\sin\phi + \phi_x\int^x \phi_{x'}\gamma_{x'}\cos\phi \mathrm{d}x') \\
&\quad + a_{31}(\gamma_x^2(\sin^2\phi - \cos^2\phi) + 2\phi_x\gamma_x\cos\phi\int^x \gamma_{x'}\sin\phi \mathrm{d}x' \\
&\quad + \gamma_{xx}\sin\phi\int^x \gamma_{x'}\sin\phi \mathrm{d}x' + \phi_x\int^x \gamma_{x'}^2\sin\phi\cos\phi \mathrm{d}x'), \\
b_{32} &= a_{21}(-\phi\phi_{xx} - \phi_x^2 + \gamma_x^2\cos^2\phi + \phi\gamma_x^2\sin\phi\cos\phi \\
&\quad + \gamma_x\sin\phi\int^x \phi_{x'}\gamma_{x'}\cos\phi \mathrm{d}x') + a_{31}(-2\phi_x\gamma_x\sin\phi + \gamma_{xx}\cos\phi \\
&\quad - \phi_{xx}\int^x \gamma_{x'}\sin\phi \mathrm{d}x' + \gamma_x\sin\phi\int^x \gamma_{x'}^2\sin\phi\cos\phi \mathrm{d}x' \\
&\quad + \gamma_x^2\sin\phi\cos\phi\int^x \gamma_{x'}\sin\phi \mathrm{d}x').
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Ω_+ を繰り返し作用させていくと高次の方程式が得られる.

演算子 Ω_- を使うと lower part のヒエラルキーの方程式が求められる. 初めのメンバーを

$$Y_{10,x} = (\Omega_- Y_{11})_x = b_{20}S + b_{30}T \tag{53}$$

と書くと係数は

$$
\begin{aligned}
b_{20} &= a_{31}, \\
b_{30} &= -a_{21}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

で与えられる. 二番目のメンバーは

$$Y_{1-1,x} = (\Omega_-^2 Y_{11})_x = b_{2-1}S + b_{3-1}T \tag{55}$$

とすると, その係数は

$$
\begin{aligned}
b_{2-1} &= -a_{21}(\sin\gamma\int^x \sin\gamma \mathrm{d}x' + \cos\gamma\int^x \cos\gamma \mathrm{d}x') \\
&\quad + a_{31}(-\sin\gamma\int^x \cos\phi\cos\gamma \mathrm{d}x' + \cos\gamma\int^x \cos\phi\sin\gamma \mathrm{d}x'), \\
b_{3-1} &= -a_{21}(\cos\phi\cos\gamma\int^x \sin\gamma \mathrm{d}x' - \cos\phi\sin\gamma\int^x \cos\gamma \mathrm{d}x') \\
&\quad - a_{31}(\cos\phi\cos\gamma\int^x \cos\phi\cos\gamma \mathrm{d}x' + \cos\phi\sin\gamma\int^x \cos\phi\sin\gamma \mathrm{d}x' \\
&\quad + \sin\phi\int^x \sin\phi \mathrm{d}x'),
\end{aligned}
\tag{56}
$$

で与えられる. 繰り返して Ω_- を作用させると高次の方程式が得られる.

この様にして Y_{11} から fused hierarchy の全ての方程式を求めることができ

4 保存量

逆問題を

$$V_x = UV,\quad V_t = WV \tag{57}$$

とかくと保存則は

$$\left(\sum_j U_{ij}\frac{V_j}{V_i}\right)_t = \left(\sum_j W_{ij}\frac{V_j}{V_i}\right)_x \tag{58}$$

の形で書くことが出来る. $i=1$ について具体的に書くと

$$(U_{11} + U_{12}\Gamma)_t = (W_{11} + W_{12}\Gamma)_x \tag{59}$$

である. ここで Γ を次の式で定義されている.

$$\Gamma = \frac{V_2}{V_1}. \tag{60}$$

他方, (57) から得られた

$$\Gamma_x = U_{12} + (U_{22} - U_{11})\Gamma - U_{12}\Gamma^2 \tag{61}$$

の関係式を使うと

$$U_{12}\left(\frac{U_{12}\Gamma}{U_{12}}\right)_x = U_{12}U_{21} + (U_{22} - U_{11})U_{12}\Gamma - (U_{12}\Gamma)^2 \tag{62}$$

が得られる.

そこで (59) での保存密度 $U_{12}\Gamma$ を

$$U_{12}\Gamma = \sum_n f_n \lambda^{-n} \tag{63}$$

と展開すると保存密度に対する漸化式

$$U_{12}\left(\frac{f_n}{U_{12}}\right)_x = U_{12}U_{21}\delta_{n2} + (U_{22} - U_{11})f_{n+1} - \sum_m f_m f_{n-m} \tag{64}$$

を得る. ただし $\mathcal{O}(U_{ij}) = \lambda$ を用いた. これらから保存密度が原理的に計算できる.

5 終わりに

この報告では, 二つのヒエラルキーを結びつけ fused hierarchy と名付けた大きなヒエラルキーの存在について議論し, その例題を示した. その示された方程式の解については触れなかった. 次回の課題としたい.

References

[1] R. N. Aiyer, J. Phys. **A16** (1983) 255.

[2] K. Imai, K. Konno and H. Kakuhata, J. Phys. Soc. Japan **68** (1999) 1115.

[3] K. Konno, K. Imai and H. Kakuhata, Phys. Letters A**286** (2001) 47.